OLM Clasa a VI-a

(1) Aflați numerele naturale prime a, b, p știind că $2010 = 67a^2 + 201b - 25p$.

prof Jurubiță Nicolae

Barem

$$\left.\begin{array}{l} 2010 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67 = 30\cdot 67 \\ 201 = 3\cdot 67 \end{array}\right\} \Rightarrow 30\cdot 67 = 67a^2 + 67\cdot 3\cdot b - 25p \quad 1p$$

$p = 67$ 1p

$30 = a^2 + 3b - 25$ 1p

~~Cazul 1~~
$$\left\{\begin{array}{l} a = 7,\ b = 2,\ p = 67 \text{ --- } 2p \\ a = 2,\ b = 17,\ p = 67 \text{ --- } 2p \end{array}\right.$$

OLM Clasa a VI-a

2) Se dă mulțimea

$$A = \{2, 3, 6, 7, 10, 11, \ldots, 198, 199, 202, 203\}.$$

a) Determinați numărul elementelor mulțimii A.

b) Demonstrați ~~numărul elementelor mulțimii~~ că orice submulțime cu 52 de elemente a mulțimii A conține cel puțin două elemente a căror sumă este 205.

Barem

a) $A = \{2, 6, 10, 14, \ldots, 202; 3, 7, 11, \ldots, 199, 203\}$ ... 1p

card $A = 2 \cdot 51 = 102$ ... 2p

b) Elementele mulțimii A sunt de forma

$4k + 2$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 50\}$ sau

$4p + 3$, $p \in \{0, 1, \ldots, 50\}$ ... 1p

Orice submulțime cu 52 de elemente a mulțimii A nu poate conține doar elemente de aceeași formă (principiul cutiei) ... 1p

Pentru $k + p = 50 \Rightarrow (4k+2) + (4p+3) = 205$ ... 2p

De exemplu: $(2, 203); (3, 202); (6, 199), \ldots$

~~Notă:~~

Clasa a VI-a OLM

1) Se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$, având măsurile de 66°, respectiv 33°.

a) Calculați măsura unghiului $\sphericalangle BOC$.

b) Dacă (OD este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$, calculați măsura unghiului $\sphericalangle COD$.

c) Unghiul $\sphericalangle AOC$ se împarte prin semidrepte cu originea O în unghiuri congruente, având măsurile exprimate prin numere naturale. Stabiliți dacă există printre aceste semidrepte o semidreaptă perpendiculară pe (OB.

***

Barem

a) I $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOC$ - adiacente $\Rightarrow m(\widehat{BOC}) = 99^\circ$ 1p

II $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOC$ - neadiacente $\Rightarrow m(\widehat{BOC}) = 33^\circ$ 1p

b) I $m(\widehat{COD}) = 66^\circ$ ... 1p

II $m(\widehat{COD}) = 0^\circ$ ... 1p

c) Problema are soluție doar pt cazul I

Unghiul $\sphericalangle AOC$ poate fi împărțit în:

3, 11 sau 33 de unghiuri congruente ... 1p

Pentru împărțirea $\sphericalangle AOC$ în 33 de unghiuri de 1° problema are soluție $(24^\circ + 66^\circ = 90^\circ)$

1p

Cazul II Problema nu are soluție. 1p

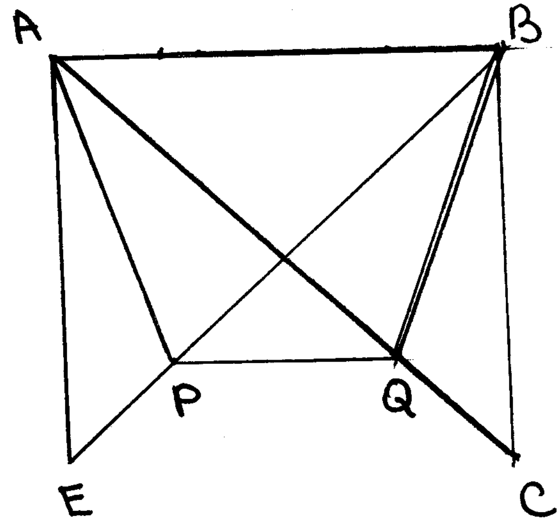
clasa a VI-a   OLM

4.) În figura alăturată $\Delta APB \equiv \Delta BQA$ și ~~$[AC] \equiv [BE]$~~
$[AC] \equiv [BE]$. Demonstrați că:

a) $\Delta APE \equiv \Delta BQC$

b) $\Delta BAE \equiv \Delta ABC$

c) $\Delta APQ \equiv \Delta BQP$.



Barem

a) $\Delta APE \equiv \Delta BQC$ ... 3p

b) $\Delta BAE \equiv \Delta ABC$ ... 2p

c) $\Delta APQ \equiv \Delta BQP$ ... 2p